Logaritmin perusteet

Pro gradu -tutkielma
Sami Määttä
Matemaattisten tieteiden tutkinto-ohjelma
Oulun yliopisto
2019

Sisältö

1 Johdanto

Tutkielmassa pyritään luomaan kokonaisuus, joka perustuu tutkittuun ja tieteelliseen tietoon matematiikan - ja erityisesti logaritmin - oppimisesta ja opettamisesta. Tämä tehdään tukeutumalla muutamaan yleiseen periaatteeseen ja käyttämällä niiden tarjoamia ideoita vastaamaan erilaisiin logaritmin oppimisen haasteisiin.

Tutkielmassa esitellään ensin **teoreettinen viitekehys**, jota seuraa **perusteluosa**, jossa viitekehystä käytetään oppimateriaalin sisällön perustelemiseen. Lisäksi kappaleessa näytetään miten eri tehtävät vastaavat tutkimuksissa esille nousseisiin haasteisiin, joita logaritmin oppimisessa esiintyy. Tätä kappaletta seuraa **opettajan opas**, jossa tehtävät esitellään yksitellen, tarjotaan vastaukset lähes kaikkiin tehtäviin ja nostetaan esille tapoja, joilla opettaja voi edistää oppimista ja materiaalin käyttöä. Opettajan oppaan jälkeen on varsinainen opiskelijan **oppimateriaali** ja sen lopussa **tehtävien vastaukset** opiskelijoille.

Oppimateriaali on erityisesti yhteisöllisen oppimisen toteuttamisen tukemiseksi ja sen periaatteita kuvaillaan Malcolm Swanin (2006) *Collaborative Learning in Mathematics* artikkelissa. Yhteisöllisen oppimisen kantavana voimana on yhteistyö itse opiskelijoiden ja myös opettajan välillä. Oppimateriaalin tehtävät toimivat parhaiten pienryhmätyöskentelyn ja koko luokan työskentelyn tukena, joissa opettajan rooli on olla toiminnan ohjaaja ja kannustaa opiskelijoita omien käsitysten ja perustelujen esittämiseen.

Oppimateriaalissa oletetaan, että opiskelija osaa ratkaista yksinkertaisempia eksponenttiyhtälöitä, tuntee eksponenttifunktion ominaisuudet ja on tehnyt eksponenttifunktioon liittyviä mallintamistehtäviä. Oppimateriaali ei edellytä eksponenttifunktion tai logaritmifunktion derivaatan tai derivoinnin osaamista. Opetussuunnitelman sisällölliset tavoitteet, jotka tämä tutkielma sisällyttää, esitellään tarkemmin seuraavassa kappaleessa.

2 Teoria

2.1 Opetussuunnitelma

Lukion opetussuunnitelman perusteiden [10] mukaan logaritmia käsitellään pitkän matematiikan kurssilla *MAA8: Juuri- ja logaritmifuntkiot*. Kurssin sisältö ja tavoitteet ovat seuraavat:

- **kertaa potenssienlaskusäännöt mukaan lukien murtopotenssit**
- tuntee juuri-, eksponentti- ja **logaritmifunktioiden ominaisuudet** ja **osaa ratkaista niihin liittyviä yhtälöitä**
- osaa tutkia juuri-, eksponentti- ja logaritmifunktioita derivaatan avulla
- **osaa hyödyntää eksponenttifunktiota mallintaessaan** erilaisia kasvamisen ja vähenemisen ilmiöitä
- **osaa käyttää teknisiä apuvälineitä** juuri-, eksponentti- ja **logaritmifunktioiden tutkimisessa** ja juuri-, eksponentti- ja **logaritmiyhtälöiden ratkaisemisessa** sekä juuri-, eksponentti- ja logaritmifunktion derivaattojen määrittämisessä sovellusongelmissa.

Erityisesti tummennettuihin osiin kiinnitetään huomiota tässä kirjassa. Potenssienlaskusääntöjä tarvitaan logaritmien laskusääntöjä todistettaessa sekä liikuttaessa sujuvasti logaritmi- ja eksponenttifunktioesityksen välillä. Edellinen myös edesauttaa logaritmiyhtälöiden ratkaisussa. Eksponenttifunktion käyttö mallintamisessa on myös olennainen osa logaritmifunktiota ja sen ymmärtämistä, sillä logaritmia käytetään monesti monimutkaisemmissa eksponenttiyhtälöiden ratkaisuissa.

2.2 Habits of mind

Opetussuunnitelman tukena tässä tutkielmassa käytetään artikkelin Cuoco, A. et al. (1996) *Habits of mind: An organizing principle for mathematics curricula* tarjoamia ihannetoimintamalleja, jotka kuvailevat keinoja, joita opiskelijoiden tulisi omaksua matematiikkaa opiskellessaan. Seuraavaksi esitellään artikkelin tarjoamat toimintamallit ("habits of mind").

1. Haluttaisiin, että opiskelijat *etsisivät säännönmukaisuuksia* ("pattern sniffers"), sillä niiden etsiminen opettaa valppautta löytää oikoreittejä ja täten ratkaisuja - ja mahdollisesta uutta matematiikkaa.

2. Opiskelijoiden pitäisi olla ***kokeilijoita*** ("experimenters") eli esimerkiksi olla valmiita kokeilemaan muuttujien arvojen vaihtamista tai uudella käsitteellä leikkimistä.

3. Opiskelijoiden pitäisi olla ***kuvailijoita*** ("describers") eli oppia selittämään omaa ajatteluaan, kertoa mitä ratkaisussa tapahtuu ja perustella omaa päättelyään.

4. Opiskelijoiden pitäisi olla ***uudelleenrakentajia*** ("tinkerers") eli pystyä hajottamaan ja kokoamaan käsitteitä ja lauseita osiinsa ja katsomaan pystyvätkö he kokoamaan sen uudestaan. Esimerkiksi $\log_a(1 + 2 + 3) = \log_a(1) + \log_a(2) + \log_a(3)$ pitää paikkaansa, mutta ei noudata tuttua laskusääntöä. Kysymysten "Miksi tämä toimii?", "Millä muilla luvuilla tämä on mahdollista?", "Onko tämä ristiriidassa logaritmin summasäännön kanssa?" pitäisi olla opiskelijoiden mielessä heidän törmätessään vastaaviin tapauksiin.

5. Opiskelijoiden pitäisi olla ***keksijöitä*** ("inventors") eli heillä tulisi olla taipumusta kehittää jotain uutta jostain ennestään tutusta asiasta. Näin opiskelijat voisivat paremmin ymmärtää, miksi jokin asia matematiikassa on määritelty, kuten se on. Esimeriksi, miksi logaritmi määriteltiin käsitteenä. Tämän voi esittää tarpeena, joka syntyi, kun kaikkia eksponenttiyhtälöitä ei voi ratkaista kätevästi.

6. Opiskelijoiden pitäisi olla ***visualisoijia*** ("visualizers") eli miten matemaattisten objektien ymmärrystä voi parantaa erilaisten visuaalisten esitysten avulla. Yksinkertaisena esimerkkinä murtoluvut voidaan esittää piirakkakuviona tai minä tahansa asiana, joka saadaan helposti osiin ja esitys on intuitiivinen käyttäjälle.

7. Opiskelijoiden pitäisi olla ***väitteidentekijöitä*** ("conjecturers") eli pystyä tekemään omia väitteitään, jotka perustuvat kokeiluun, dataan, säännönmukaisuuksiin, omiin kokemuksiin ja ymmärrykseen kyseessä olevasta ilmiöstä.

8. Opiskelijoiden pitäisi olla *arvailijoita* ("guessers"). Tämä tarkoittaa pelottomuutta tehdä arvauksia ja arvioita mahdollisesta lopputuloksesta ilman selkeää ratkaisustrategiaa. Monesti arvailu johtaa uusien oivallusten ja strategioiden pariin.

Toivotaan, että omaksumalla ylläolevat ihannetoimintamallit, opiskelijat oppisivat tunnistamaan tilanteita, joissa matematiikan käyttäminen olisi hyödyllistä ja myös käyttämään sitä, vaikka ongelma ei olisikaan "puhdas" tai helpposelkoinen [6].

Tummennetut periaatteet ovat tämän tutkielman kannalta olennaisia ja näihin viitataan tutkielman myöhemmissä osissa - erityisetsi tehtävien perusteluosassa.

2.3 Collaborative learning

Malcolm Swanin *Collaborative Learning in Mathematics* [16] kannustaa siirtymään mekaanisesta matematiikan opiskelusta ja opettamisesta sellaiseen ympäristöön, jossa matematiikan opiskelu on "yhteinen aktiviteetti, jossa oppijat haastetaan ja he oppivat ymmärtämään matematiikkaa keskustelun [ja yhteistyön kautta]". Matematiikan opettaminen on myös yhteistyötä opettajan ja opiskelijoiden välillä, jossa selitysten sijaan ensimmäisenä tarjotaan ongelmia ja väärinkäsitykset nostetaan esille, jolloin niistä oppiminen on tehokkaampaa.

Artikkeli esittelee erilaisia opetusaktiviteetteja, jotka kannustavat yo. ajatteluun.

1. Matemaattisten objektien luokittelu: esitellään ryhmiä, jotka sisältävät matemaattisia objekteja. Opiskelijan tehtävänä on keksiä erilaisia kategorisointeja, joiden perusteella objekteja voidaan jakaa ryhmiin.

2. Tulkita erilaisia esitystapoja: esimerkiksi funktio voidaan esittää symbolein, taulukon tai kuvaajan avulla. Opiskelijoiden tulisi oppia tunnistamaan erilaisten esitystapojen

yhtäpitävyyksiä.

3. **Matemaattisten väitteiden arviointia:** Esitellään väitteitä, jotka voivat olla aina totta, joskus totta tai ei koskaan totta. Tällä tavoin ennakkokäsitykset erilaisista objekteista tulee esille ja niistä voidaan keskustella. Tämä aktiviteetti kannustaa myös perustelemaan omia käsityksiään.

4. **Omien tehtävien teko:** Oman tehtävän tekemisessä pitää sekä osata luoda ongelma ja ratkaista se. On hyvin erilainen tilanne ratkaista yhtälö kuin esimerkiksi miettiä, miten saisi tehtyä vaikean yhtälön, kun haluaa ratkaisun olevan esimerkiksi $x = 2$. Tehtävän tekijä voi toimia opettajana tilanteessa, kun toinen opiskelija yrittää ratkaista hänen tekemänsä tehtävän.

5. **Perustelujen ja ratkaisujen analysointi:** Esitellään valmis ratkaisu annettuun ongelmaan ja kannustetaan opiskelijaa selvittämään, onko ratkaisu oikein ja miksi. Tämä pakottaa miettimään tehtävän ratkaisua muiden näkökulmasta ja täten se altistaa opiskelijan erilaisille tavoille ratkaista sama tehtävä.

Tässä tutkielmassa keskitytään erityisesti tummettuihin osiin ja niihinkin palataan perusteluosassa.

2.4 Tarkoituksenmukainen harjoittelu ja variaatioteoria

Tarkoituksenmukainen harjoittelu (”deliberate practice”) tarkoittaa hyvinstrukturoitua ja mahdollisesti ohjattua harjoittelua, joka on välttämätöntä maksimaalisen osaamisen saavuttamiseksi. Jatkuva, samanlainen ja pitkäänjatkuva harjoittelu ei välttämättä johda koko ajan paraneviin tuloksiin. [4]

Matematiikan opetukseen sovellettuna tarkoituksenmukainen harjoittelu voi tarkoittaa erilaisten tehtävien tai tehtäväryhmien suunnittelua ja tekoa, joiden tarkoitus on tuoda esille jokin erityinen ominaisuus opittavasta objektista.

Artikkelin [9] mukaan variaatioteorian peruspilarit ovat:

1. Kontrasti (”contrast”), jonka mukaan opittavaa objektia ei voi oikeasti oppia ja ymmärtää ilman, että tuodaan esille asioita, mitkä erottavat kyseisen objektin jostain muusta objektista. Esimerkiksi logaritmifunktion $\log_a x = y$ tapauksessa on hyvä päästä näkemään, miten eri muuttujien muuttaminen vaikuttaa funktion kulkuun. Tällä tavoin nähdään, miten se esimerkiksi eroaa lineaarisesta funktiosta $y = mx + b$.

2. Yleistäminen (”generalization”) tapahtuu, kun ollaan havaittu millä tavoin objekti eroaa muista objekteista. Esimerkiksi logaritmifunktion tapauksessa kontrastin luomisen jälkeen voidaan siirtyä yleistämään mitä ominaisuuksia esimerkiksi sen kuvaajalla on verrattuna muiden funktioiden kuvaajiin. Eroavaisuuksien löytämisellä päästäänkiin siihen, mikä tekee kaikista logaritmifunktioista samanlaisia eli mitä ominaisuuksia niillä on.

3. Yhdistyminen (”fusion”) tarkoittaa, kun kontrastin ja yleistämisen ymmärtäminen tapahtuu samanaikaisesti. Objektin käsittely on helppoa ja useita asioita voidaan asettaa muutoksen alaisiksi. Logaritmifunktion tapauksessa voidaan esimerkiksi pohtia millä lukujoukkojen yhdistelmillä funktio tai yhtälö on määritelty, kuten tehtävässä 14

tehdään.

Variaatioteoriaa ja tarkoituksenmukaista harjoittelua yhdistämällä voidaan luoda esimerkiksi seuraavanlaisia tehtäviä:

Ratkaise yhtälö.

1. $x^2 - 1 = 0$
2. $x^2 = 0$
3. $x^2 + 1 = 0$

Tehtäväryhmässä on joukko tietystä syystä valittuja tehtäviä (tarkoituksenmukainen harjoittelu), joka tässä tapauksessa voi olla, miten vakiotermi vaikuttaa funktioiden $f(x) = x^2 + b$ nollakohtien määrään (kontrasti).

2.5 Vertailutehtävät, ja konseptuaalinen ja proseduraalinen tieto

Contrasting cases on yhdysvaltalainen opetusmateriaali, jonka tarkoituksena on tuoda yleensä kahden ratkaisutavan vertailun avulla esille joko yleisiä virheitä, vaihtoehtoisia tapoja tai tehokkaampia tapoja ratkaista tehtäviä. Vertailua täydentää yleensä noin viisi kysymystä. Tästä esimerkkinä voidaan katsoa johdantotehtävää A.1. Yleensä ensimmäisissä kysymyksissä pyydetään jollain tapaa selittämään kumpikin ratkaisutapa, mikä kannustaa opiskelijaa käsittelemään kumpaakin tapaa aktiivisesti. Sitten etsimään yhtäläisyyksiä ja eroja. Loput kysymykset pyrkivät yleensä laajentamaan pohdintamaan juuri kyseessä olleen tehtävän ulkopuolelle. Materiaali siis noudattaa läheisesti myös artikkelin [16] suosittelemaa tapaa matematiikan oppimisista yhteisössä ja yhteistyön avulla.

Contrasting cases -materiaali pohjaa vertailutehtäviä koskeviin tutkimuksiin, jotka puolestaan käyttävät vahvasti **konseptuaalisen tiedon** ja **proseduraalisen tiedon** käsitteitä. Konseptuaalisella tiedolla matematiikassa tarkoitetaan ymmärrystä matemaattisesta objektista ja objektin suhdetta muihin objekteihin ja ympäristöihin, joissa se on olemassa. Proseduraalinen tieto viittaa ensisijaisesti menetelmiin ja monet opettajat rinnastavat sen ulkoa opetteluun, vaikka se voitaisiin nähdä pankkina, joka sisältää erilaisia strategioita ja keinoja ratkaista käsillä oleva ongelma. [15].

Ollaan havaittu, että vertailu auttaa erityisesti joustavan proseduraalisen tiedon kehittymisessä. Joustavuudella tarkoitetaan kykyä valita tunnetuista ratkaisustrategioista tehokkain ja tilanteeseen sopivin ratkaisustrategia. [11]. Myöhemmin on myös huomattu, että se auttaa konseptuaalisen tiedon kehittymisessä ja vertailun oppimisvaikutuksen tehostamiseksi vertailun kohteista toisen kannattaa olla jo ennestään tuttu opiskelijalle [12]. Vertailutehtävillä voidaan myös saada aikaan erilaisia oppimistuloksia riippuen siitä minkälaista vertailua tehdään [13]. Esimerkiksi edellä mainitussa *Contrasting cases* -materiaalissa on neljä toisistaan selvästi eroavaa kategoriaa, joiden pohjalle vertailutehtävä on tehty. Nämä ovat:

1. ”Miksi se toimii?” -tehtävissä on yleensä sama tehtävänanto, johon esitetään niin sanottu yleinen ratkaisustrategia. Esimerkiksi lausekkeen $(x+1)^2$ purkamisessa voitaisiin

vertailla keskenään muistisääntöä ja distributiivisuuden käyttöä.

2. **”Mitä eroa?”** -tehtävissä esitellään kaksi ratkaisuprosessia, joissa on jokin olennainen ero. Se voi olla jokin ratkaisuprosessiin liittyvä erikoisuus, esimerkiksi joku toinen käyttää erilaisia merkintöjä tai kokonaan erilaista lähestymistapaa. Näissä tehtävätyypeissä voi tuoda myös esille sen, miten ratkaisuprosessi voi olla samanlainen tai erilainen riippuen lähtökohdasta.

3. ”Missä virhe?” -tehtävissä esitellään yleinen virhe ratkaisuprosessissa ja sitä verrataan samaan, mutta oikein ratkaistuun tehtävään.

4. ”Kumpi on parempi?” -tehtävissä esitellään yleensä kaksi tapaa ratkaista tehtävä oikein, mutta toinen tapa on perusteltavissa paremmaksi.

Tutkielmassa on erityisesti käytetty hyväksi tummennettua tehtävätyyppiä, koska sellaiset tehtävät tarjoavat hyviä mahdollisuuksia tuoda esille, miksi logaritmia tarvitaan (tehtävä A.1), miten ratkaisuprosessi onkin samanlainen (tehtävä C.1) tai miten yhtälön- ja epäyhtälönratkaisujen prosessit eroavat toisistaan (tehtävä C.3).

3 Oppimateriaalin perustelu ja opettajan opas

Oppimateriaalin kappaleet noudattavat seuraavaa rakennetta: ensimmäisenä tehtävät keskittyvät **konseptuaalisen tiedon** kehittämiseen ja sen jälkeen **proseduraalisen tiedon**. Swanin [16] artikkelin hengessä opiskelijalle tarjotaan ensin ongelmia, joiden tarkoitus on kehittää erityisesti konseptuaalista tietoa. Sen jälkeen tarjotaan yleisempiä työkaluja tehtävien selättämiseen ja harjaannutetaan tiedon proseduraalista puolta. Seuraavissa alikappaleissa tämä rakenne tuodaan esille tehtäviä esitellessä.

Perustelujen lomaan on myös sisällytetty opettajan opas. Mikäli tehtävään liittyy lisämotivointia, -kysymyksiä tai -huomioita, joita opettaja voi kysyä tunnin aikana, niin ne ovat esitelty harmaissa laatikoissa tekstikappaleiden välissä. Joissakin tehtävissä laatikko on jätetty pois, sillä tehtävän idea välittyy tekstistä. Jokaiseen tehtävään on myös viitattu tiedoston sisäisellä hyperlinkillä. Palaaminen takaisin opettajan oppaaseen tapahtuu monilla PDF-lukuohjelmilla painamalla ”ALT + $\Leftarrow$”.

Oppimateriaalissa esiintyvät Kalle ja Leena -hahmot, joita on käytetty *Joustava yhtälönratkaisu* -oppimateriaalissa. Niitä käytetään oppimateriaalissa, koska ne tunnetaan jo ennestään.

3.1 Ajankäyttösuunnitelma

Oppimateriaali voidaan karkeasti jaotella kolmeen osaan ja siten kolmeen 75 minuutin oppituntiin:

- 1×75 minuuttia *Johdattelu logaritmiin ja logaritmin määritelmä*
- 1×75 minuuttia *Logaritmifunktion määritelmä ja laskusäännöt*

- 1×75 minuuttia *Logaritmiyhtälöt ja -epäyhtälöt*

Erityisesti *Logaritmifunktion määritelmä ja laskusäännöt* on laaja kappale. Ensin siinä käsitellään logaritmifunktion käsitettä ja sitten laskusääntöjä. Funktio-osuudesta kannattaa jättää osia kotitehtäviksi, jotta laskusääntöihin päästään siirtymään saman tunnin aikana.

3.2 Johdattelu logaritmiin ja logaritmin määritelmä

3.2.1 Kappaleen tavoitteet

Kappaleessa opiskelija

- ymmärtää logaritmin käsitteen hyödyllisyyden erilaisten eksponenttiyhtälöiden ratkaisussa.
- ymmärtää, että logaritmi sopii luonnollisesti olemassaolevien operaatioiden joukkoon.
- oppii esittämään perusteluja matemaattisten väitteiden puolesta ja niitä vastaan.
- saa vankan, intuitiivisen käsityksen logaritmista.
- oppii käyttämään logaritmia laskutoimituksissa ja siirtymään logaritmimuodosta eksponenttimuotoon ja päinvastoin luontevasti.
- oppii käyttämään GeoGebran logaritmifunktiota.
- ymmärtää logaritmisen asteikon hyödyllisyyden informaation esittämisessä.

3.2.2 Kappaleen materiaalin perustelu ja opettajan opas

Oppimateriaali alkaa ajatuksia herättelevällä vertailutehtävällä A.1, jossa esitellään uusi haaste eksponenttiyhtälöiden ratkaisussa esittelemällä ennestään tuttu keino niiden ratkaisuun ja sitä verrataan yhtälöön, joka ei ratkeakaan tutulla tavalla. Tehtävä toimii siis motivaationa sille, miksi logaritmin käsite kannattaa kehittää ja se käyttää hyväkseen opiskelijalle ennestään tuttuja keinoja, joita verrataan erilaiseen tapaan yrittää ratkaista yhtälö, kuten artikkelissa [12] sanotaan. Lisäkysymykset kannustavat opiskelijoita pohtimaan yleisesti minkämuotoisia eksponenttiyhtälöitä he ovat kohdanneet ja mitä eivät. Tehtävä toimii myös esimerkkinä siitä, miten ennestään tuntematonta ongelmaa voisi lähestyä esittelemällä Leenan tavan: kokeilemalla ja visualisoimalla [6].

A.1 Opeopas: Vertailun avulla havainnollistetaan, että millaisia eksponenttiyhtälöitä ei voi ratkaista tarkasti käyttämättä logaritmia. Tarkoituksena on käydä läpi kummankin tavat perustellen. Miksi Kalle tekee näin? Miksi Leena tekee näin?

Kysymys 3: Miksi Kalle ei ratkaise yhtälöä kuvaajan avulla? Onko Kallen tapa parempi?

Kysymykset 4 ja 5 ohjaavat pohtimaan, kuinka rajallinen Kallen tapa on, joka edellyttää $a^x = a^y$ tilannetta.

Logaritmin määritelmään johdatellaan osoittamalla, että uutta matematiikkaa kehitetään yleensä tarpeeseen, joka huomataan, eikä uusi määritelmä ilmesty tyhjästä. Tämä näytetään rinnastamalla logaritmi luonnolliseksi vastineeksi eksponenttifunktiolle, kuten vähentäminen on lisäämiselle tai neliöjuuri on neliöön korotukselle, kuten artikkelissa [8] ehdotetaan. Määritelmän jälkeisessä mallitehtävässä A.3 näytetään miten logaritmia voidaan käyttää yhtälönratkaisussa ja, että se tosiaan on kumoava operaatio eksponenttifunktiolle. Samalla kerrotaan sen hyödyllisyydestä merkintätapana vertaamalla sitä lukuun π ja $\sqrt{2}$, jotka ovat paljon helpompia tapoja merkitä irrationaalilukuja kuin päättymätön desimaaliesitys.

Tehtävä A.5 on artikkelin [16] mukainen väitekorttitehtävä. Tehtävässä arvioidaan logaritmiin liittyvien väitteiden todenmukaisuutta. Aluksi väitteet ovat yksinkertaisia, jotka voidaan suhteellisen helposti kumota logaritmin määritelmää käyttämällä, mutta ne herättävät silti kysymyksen ”miksi tämä on näin?” Tehtävässä kannustetaan palauttamaan eksponenttifunktion ominaisuudet mieleen, jolloin väitteiden kumoamisessa tai vahvistamisessa tulisi nojautua niiden käyttämiseen. Tämä voi myös ehkäistä opiskelijoiden logaritmimerkinnän väärinkäyttöä [5], [17] ja sen ymmärtämisestä jonkinlaisena kirjainmuuttujana, jonka voi kumota [2].

Väitteet etenevät helpommasta vaikeimpaan ja lopussa esitetään väitteitä matemaattisten symboleiden muodossa. Näin huolehditaan eriyttämisestä opetussuunnitelman mukaisesti [10]. Väitteiden seassa on myös epämääräisempiä väitteitä, kuten ”logaritmin tulos on aina eksponentti”, jonka seurauksena päästään keskustelemaan myös matematiikan kielestä ja siitä miten kukin opiskelija ymmärtää oppimansa.

A.5 Opeopas:

Kaikkia väitteitä ei tarvitse ehtiä käydä läpi. Tärkeimmät ovat 1.-10., jotka käsittelevät määritelmää ja logaritmin käyttäytymistä. Loppuihin väitteisiin voidaan palata myöhemmin esimerkiksi kotitehtävinä, kun syventymiseen on paremmin aikaa.

Väitteiden pintapuolisen käsittelyn välttämiseksi opettajan kannattaa kysyä tarkentavia kysymyksiä, kuten "Miksi ajattelet näin?" ja "Miten perustelisit tämän (matemaattisesti)?". Myös omien väitteiden keksiminen auttaa asiaan syventymisessä. [16]. Opiskelijoita voi neuvoa lähestymään väitteitä eksponenttifunktion avulla ja tätä kautta päästään ymmärtämään, miksi logaritmin määritelmä on sellainen kuin se on. Voi olla helpompi esimerkiksi nähdä, että miksi $a^x = 0$ on mieletön väite kuin, että sen perustelee logaritmin kautta.

Vastaukset: 1. E. 2. J. 3. J. 4. E. 5. E. 6. E. 7. A. 8. J. 9. A. Jos logaritmi tulkitaan aina eksponentiksi. 10. 11. J. 12. J. 13. A. (Intuitiivisuus riittää tässä vaiheessa.) 14. A. (Intuitiivisuus riittää tässä vaiheessa.) 15. J.

Väitekorttitehtävän jälkeen siirrytään proseduraalisen tiedon harjoitteluun. On havaittu, että opiskelijoilla on erityisen haastavaa siirtyä eksponenttimuodosta logaritmimuotoon ja päinvastoin. Logaritmin ymmärtäminen on myös joidenkin tutkimusten mukaan monilla opiskelijoilla muistin varassa, eikä merkintää oikeasti ymmärretä. [5], [17]. Opiskelijalle annetaan tehtäväryhmiä, joiden avulla harjoitellaan täsmälleen tätä ja merkinnän ymmärtämistä tarkoituksenmukaisen harjoittelun ja variaatioteorian hengessä. Tehtävässä 1 opiskelijoita pyydetään muuttamaan yhtälöt eksponenttimuotoon ja arvioimaan lopullisten yhtälöiden totuusarvoa. Tämä ehkäisee pintapuolista määritelmän käyttöä, koska opiskelija joutuu myös pohtimaan, onko yhtälö tosi. Tehtävässä myös palautetaan mieleen, miten eri eksponentit vaikuttavat luvun ulkomuotoon. Esimerkiksi opiskelija on saattanut unohtaa, että esitykset $a^{\frac{1}{2}}$ ja $\sqrt{a}$ tarkoittavat samaa. Tehtävässä 2 harjoitellaan logaritmin laskemista eli logaritmin määritelmää käytetään, ja taas kiinnitetään huomiota siihen, että erilaiset eksponenttivastaukset tulevat ilmi. Tehtävässä 3 opiskelija pääsee jo ratkaisemaan yksinkertaisia eksponenttiyhtälöitä logaritmin avulla, mutta ratkaisuprosessi peitetään vain logaritmimuotoon siirtymiseksi. Tällä tavoin tuodaan esille, että logaritmin määritelmän käyttäminen yhtälönratkaisussa voi olla hyvinkin helppoa. Tehtäväryhmässä siirrytään myös asteittain siihen, että yhtälössä on oikeasti kyseessä kahden lausekkeen yhtäsuuruus, joka voi ehkäistä virhettä, että opiskelija merkitsee $3^x = y + 4 \leftrightarrow \log_3 y + 4 = x$. Tehtävässä 4 esitellään eri yhtälöitä, joissa muuttuja x on eri kohdissa ratkaistavaa yhtälöä ja näin voidaan havainnollistaa, että millä tavoin esimerkiksi määrittelyjoukko pitää huomioida tai yhtälönratkaisuprosessi muuttuu. Tehtävässä 5 tuodaan esille logaritmeja, jotka eivät ole määriteltyjä. Kuitenkin $\log_{-2} 8 = y$ voisi periaatteessa olla mahdollinen, mutta tuottaisi ongelmia logaritmifunktion jatkuvuudessa. Tähän palataan logaritmifunktion yhteydessä uudelleen.

Lukion opetussuunnitelman perusteissa [10] sanotaan, että teorian ja käytännön välille pitää muodostaa mielekkäitä yhteyksiä, joten tehtävässä A.7 näytetään, miten logaritmia käytetään maanjäristysten voimakkuuksien mittaamisessa. Tehtävässä pyydetään myös selvittämään, miksi *Richterin asteikkoa* ei enää käytetä. Opetussuunnitelmassa [10] sanotaan myös, että opiskelijan tulee harjaantua käyttämään tietokoneohjelmistoja erilaisten tilanteiden mallintamisessa ja tässä tehtävässä GeoGebran avulla näytetään, miten logaritminen asteikko on parempi vaihtoehto diagrammien tekemiselle maanjäristysten tapauksissa kuin lineaarinen. Tehtävän teoria on peräisin artikkelista [7], jossa *momenttimagnitudiasteikko* esitellään.

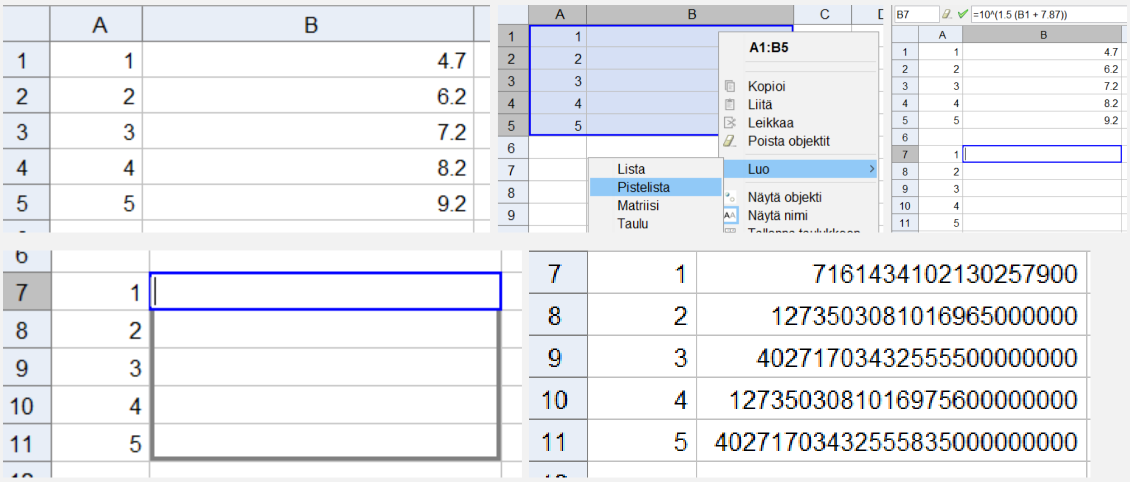
A.7 Opeopas:

Tuodaan ilmi, miksi logaritminen asteikko on parempi kuin lineaarinen, sillä lineaarisessa asteikossa energioita olisi hyvin vaikea verrata toisiinsa diagrammin avulla niiden suuruuserojen takia.

Tuodaan myös esille logaritmisen asteikon yhden pykälän välinen suhdeluku, joka on tässä tapauksessa $10^{1,5}$.

1. $7{,}16 \cdot 10^{18}$ J

2. GeoGebra-ohje:



3. $10^{1,5} \approx 32$.

4. $10^{1,5 \cdot 2} \approx 1000$. Tehtävien 3. ja 4. vastauksia kannattaa verrata toisiinsa ja näyttää opiskelijoille, että logaritmisessa asteikossa suhdeluvut voivat olla hyvin suuria.

5. Enemmän kuin $2{,}02 \cdot 10^{19}$ J ja 4865,9 megatonnia.

6. *Richterin asteikko* koki saturaatiota isolla järistyksillä, joten ison järistyksen sattuessa se ei ollut luotettava. Tämä tarkoittaa sitä, että jollain

Johdantokappale siis loppuu konkreettiseen tehtävään, jossa esitellään yksi logaritmin käyttökohde.

3.3 Logaritmifunktion määritelmä ja laskusäännöt

3.3.1 Kappaleen tavoitteet

Kappaleessa opiskelija

- oppii logaritmifunktion käsitteen ja kehittää vankan ymmärryksen sen kuvaajan kulusta.
- harjoittaa argumentointitaitojaan liittyen logaritmifunktioon.
- kertaa käänteisfunktion käsitteen.
- oppii logaritmin laskusäännöt ja ymmärtää intuitiivisesti niiden hyödyllisyyden.
- harjaantuu laskusääntöjen käytössä.
- oppii todistamisen perusteita ja selittämään muiden ratkaisujen kulkua.
- oppii arvioimaan logaritmilausekkeiden suuruutta.

3.3.2 Kappaleen materiaalin perustelu ja opettajan opas

Logaritmifunktion määritelmän jälkeen tulee tehtävä B.2, jossa opiskelija pääsee tutkimaan logaritmifunktion kulkua muuttamalla parametrien a, b, c, d ja e arvoja funktiossa $e \log_a(b \cdot x + c) + d$ tietokoneohjelmiston avulla, kuten opetussuunnitelman perusteet [10] velvoittavat. Parametrien vaikutusten kirjaaminen tehdään **kontrastin** [9] avulla eli opiskelijan pitää havaita, mikä funktiossa muuttuu tai pysyy samana, kun jonkin tietyn parametrin arvoa muuttaa. Tehtävässä pyritään myös **yleistämään** [9] logaritmifunktion ominaisuuksia, kun siinä pyydetään tutkimaan, mikä funktiossa pysyy samana ja miten ne ominaisuudet erottavat sen muista funktioista.

> **B.2 Opeopas:**
>
> 1. Kannattaa koota yhteisesti taulukko. Jos aikaa on vähän, niin voidaan käydä opettajajohtoisesti. Erityisesti vähenevyys ja kasvavuus selville.
>
> Opiskelijalle voi olla epäintuitiivista, että jos $c > 0$, niin funktion $\log_a(x + c)$ kuvaajan translaatio on vasemmalle (”miinus-suuntaan”), eikä oikealle (”plus-suuntaan”). Yksi selitys: Kestää vähemmän ”aikaa” saavuttaa isompia arvoja, siksi nollakohta ”aikaistuu”.
>
> 2. a) Peilautuu x-akselin suhteen. b) Peilautuu y-akselin suhteen ja määrittelyjoukoksi tulee $x \in]-\infty, 0[$.
>
> 3. a) Taaskin kannattaa koota taululle. Tärkeitä ominaisuuksia: 1. Funktio saa määrittelyjoukossa kaikki arvot $-\infty$ ja ∞ välillä. (Kohta 3. b) johdattelee tähän.) 2. Aluksi arvot muuttuvat paljon, mutta lopuksi ei. Päinvastoin kuin eksponenttifunktiolla.

Tehtävässä B.4 käytetään taas hyväksi Swanin [16] väitekortti-ideaa ja väitteet koskettavat tällä kertaa logaritmifunktiota. Tehtävässä saa myös käyttää hyväksi GeoGebraa tai aiempaa applettia. Tällä tavoin opiskelijat voivat tehdä valistuneita arvauksia siitä pitävätkö väitteet paikkaansa, mutta samalla arvioida, onko empirismi tarpeeksi hyvä perustelu matematiikassa [6].

Tehtävä B.4:

1. E. Lauseke $1 - x$ pienenee, joten funktio on aidosti vähenevä.

2. A, koska $\log_a x = 1$ kaikilla $x = 0$.

3. J. $\log_a(x + c)$, kun $c \neq 0$ ei kulje $(0, 1)$ kautta. Keskustelua voi herättää kysymällä: "Entä $\lg(x + 1)$ tai $\lg x - 2$?"

4. J. Esim. jos $a < 0$, niin silloin aid. väh. ja täten $\to -\infty$.

5. A. Todista käyttämällä esimerkiksi logaritmin määritelmää.

6. E. Funktio $y = \log_a x$ saa arvon 1 vain, jos $y = 0$ tai $a = 1$. $a = 1$ ei ole mahdollista, joten $y = 0$ eli välin päätepisteen arvo on aina 1. Jos $a > 1$, niin funktio on aid. kas. eli sen arvot vain suurenevat luvusta 1. Näin ei koskaan lähestytä $-\infty$. Vastaavanlainen vastaesimerkki, jos aid. väh.

Kotitehtäväksi voi antaa omien väitteiden keksimisen.

Seuraavaksi tehtävässä 6 nostetaan esille tehtävän 5 kysymys siitä, miksi $\log_{-2} 8 = y$ voisi periaatteessa toimia yksittäistapauksena, mutta ei jatkuvana funktiona. Tämä kannustaa pohtimaan logaritmifunktion ominaisuuksia ja toivottavasti vahvistaa ajatusta siitä, miksi se on jatkuva ja miksi kätevimmät funktiot yleensä ovatkin jatkuvia. Tehtävässä 7 opiskelija todistaa, että eksponentti- ja logaritmifunktio ovat toistensa käänteisfunktioita, mikä vastaa myös tarpeeseen helpottaa toiselta asteelta siirtymistä yliopistotasolle, kun tämä pyydetään todistamaan [1]. Samalla palautetaan mieleen käänteisfunktion määritelmä ja luodaan yhteys käänteisfunktion ja funktion suhteesta niin algebrallisesti kuin visuaalisesti.

7 **Opeopas:** Voidaan ottaa esille, että logaritmin avulla voidaan tarkistaa noudattavatko jonkin taulukon arvot eksponenttifunktiota. Jos arvot noudattavat eksponenttifunktiota, niin logaritmifunktioon sijoittamisen jälkeen ne noudattavat jonkin suoran funktiota - vaikka logaritmifunktio ei olisikaan suora käänteisfunktio sille eksponenttifunktiolle, jota arvot noudattavat. Tämä johtuu eksponentin siirtosäännöstä. Tämä ei kuitenkaan ole näin yksiselittäistä: jos logaritmin kantaluku eroaa suuruudeltaan huomattavasti arvojen suuruudesta, saattaa funktion kuvaaja vain muistuttaa suoraa.

Laskusääntöjen esittelyssä yleisen muodon vieressä esitellään esimerkki sen käytöstä ja lauseen jälkeen nämä pyydetään toteamaan näissä tapauksissa paikkaansa. Laskusäännöt todistetaan myöhemmin.

Tehtävässä B.7 käytetään hyväksi Swanin [16] esittelemää ideaa tekemisestä ja purkamista ("doing and undoing"), jossa opiskelijat itse rakentavat toiselle opiskelijalle tehtävän. Kyseisessä tehtävässä opiskelijat käyttävät hyväkseen logaritmin laskusääntöjä luodakseen sievennettäviä lausekkeita. Tehtävä myös valmistaa käsittelemään seuraavan kappaleen yhtälöitä, kun lausekkeissa on myös muuttujia. Määrittelyjoukon pohtiminen palauttaa kertaamaan logaritmifunktion ja logaritmin määritelmän.

B.7 Opeopas:

Opiskelijat saattavat tehdä hyvin yksinkertaisia lausekkeita, joten paritehtävänä tehtynä voi kannustaa vaikeampien tekemiseen ja useampien laskusääntöjen käyttämiseen. Nämä voi myös kerätä taululle, joista osa valitaan (koti)tehtäviksi.

Kannattaa pitää korvat auki siltä varalta, kun opiskelijat puhuvat ”epäonnistuneista” lausekkeista, koska eivät ole osanneet muokata sitä enempää. Todennäköisesti jotain toista laskusääntöä käyttämällä olisi voinut edetä.

Tehtävässä B.9 opiskelijoita pyydetään Swanin [16] artikkelin mukaisesti kuvailemaan ja perustelemaan jonkun toisen todistusta, jossa todistamisen vaiheet ovat sekaisin. Tehtävässä myös näytetään, miten eksponentti- ja logaritmimuodon välillä liikkuminen voi auttaa käsittelemään näennäisesti monimutkaista ongelmaa ja tutustuttaa todistamiseen. Myös opetussuunnitelman perusteissa [10] painotetaan, että opiskelija oppii ”–seuraamaan matemaattisen tiedon esittämistä, lukemaan matemaattista tekstiä, keskustelemaan matematiikasta, ja – arvostamaan esityksen täsmällisyyttä ja perustelujen selkeyttä” (s. 131).

B.9 Opeopas:

Voidaan keskustella todistuksen riittävyydestä, kun käsitellään ”tarvittavat lisämerkinnät”.

Tehtävässä 9 opiskelija harjoittelee todistamaan kolme muuta logaritmien laskusääntöä ja vastaa tarpeeseen todistamisen lisäämisestä [1]. Edelleen tehtävässä 10 arvioidaan laskusääntöjen toimivuutta näennäisellä ristiriidalla, jota ei kuitenkaan ole. Tehtävä 11 on muokattu versio artikkelin [5] suuruusvertailutehtävästä, jonka seurauksena huomattiin, että opiskelijat ovat huonoja arvioimaan logaritmilausekkeiden suuruuksia. Tehtävä on muokattu siten, että siinä kannattaa käyttää logaritmin laskusääntöjä.

3.4 Logaritmiyhtälöt ja -epäyhtälöt

3.4.1 Kappaleen tavoitteet

Kappaleessa opiskelija

- oppii logaritmiyhtälöiden ratkaisuun liittyvät erityispiirteet, kuten määrittelyjoukon määrittämisen.
- ymmärtää käänteisfunktion merkityksen yhtälönratkaisussa.

- kertaa aidon monotonisuuden käsitteen ja ymmärtää sen merkityksen yhtälön- ja epäyhtälönratkaisussa.
- kehittää lukukäsitettään kattamaan myös logaritmin avulla ilmaistut luvut.
- kertaa eksponenttifunktion käytön mallintamisessa.
- ymmärtää logaritmifunktion käytön eksponenttiyhtälöiden ja -epäyhtälöiden ratkaisussa.
- arvioi kriittisesti tosimaailmaan liittyvää informaatiota.

3.4.2 Kappaleen materiaalin perustelu ja opettajan opas

Vertailutehtävässä C.1 on esitetty neliöjuuri- ja logaritmiyhtälön ratkaisuprosessit. Neliöjuuriyhtälön ratkaiseminen on tuttua opiskelijalle, jolloin sen vertaaminen uuteen asiaan, eli logaritmiyhtälön ratkaisemiseen, tehostaa oppimista [12]. Tehtävä noudattaa ”Mitä eroa?” -kategorian ideaa, mutta samalla havainnollistaa, kuinka yhtälönratkaisuprosessi onkin samanlainen. Kummassakin tapauksessa määrittelyjoukko on tärkeä ja ratkaisuissa käytetään käänteisfunktiota. Erityisesti käänteisfunktion käyttö voi auttaa opiskelijaa ymmärtämään logaritmin merkintää ja sen yhteyden funktioon. Tämä voi ehkäistä logaritmimerkinnän ymmärtämisen jonkinlaisena kertoimena, kuten artikkelissa [2] opiskelijat olivat erehtyneet tekemään, ja he kohtelivat logaritmia ikään kuin muuttujana. Lopuksi opiskelijaa pyydetään ratkaisemaan eksponenttiyhtälö, jolloin juuri opittua voidaan käyttää toisessa tilanteessa.

C.1 Opeopas:

Tarkoituksena on rinnastaa logaritmiyhtälöiden ratkaiseminen muiden ennestään tuttujen yhtälöiden ratkaisemiseen. Logaritmin tapauksessa pitää vain huomioida erilainen määrittelyjoukko ja käänteisfunktio, jotka kuitenkin edellyttävät potenssilaskennan tuntemista. ”Käytetään funktiota x kummallakin puolella” on itse asiassa tuttu ilmiö, jota ollaan käytetty alkeellisimmastakin yhtälöratkaisumenetelmästä lähtien.

Ajatus ”funktion käyttämisestä” voi olla opiskelijalle intuitiivisempi kuin logaritmin määritelmän käyttäminen, joten tämä voidaan esitellä vaihtoehtoisena tapana ymmärtää se. Tehtävän jälkeen voi esimerkiksi palata tehtäviin 1-5 ja kokeilla ”uutta” tapaa vanhoihin tehtäviin.

Tehtävän C.2 tarkoituksena on huomauttaa siitä, että logaritmilausekkeet ovat lukuja siinä missä muutkin, jos ne eivät sisällä muuttujia. Palautetaan siis mieleen, miten yhteisen tekijän huomaaminen auttaa yhtälönratkaisussa. Tämä auttaa tehtävän tilanteissa, kun kantaluvut ovat erit. Tehtävässä myös näytetään, että eksponenttiyhtälöiden ratkaisussa vastaukset voivat olla hyvinkin erinäköisiä, mutta silti yhtä oikein.

Seuraava ”Mitä eroa?” -kategorian tehtävä C.3 korostaa yhtälön- ja epäyhtälönratkaisuprosessien eroja. Samalla käsitellään funktioiden aitoa monotonisuutta ja sen roolia niiden ratkaisussa. Viimeinen kysymys kannustaa opiskelijaa miettimään merkkien $>, <$ ja $\geq, \leq$ merkitystä ja miten se vaikuttaa vastaukseen.

C.3 Opeopas:

Tärkeää saada intuitiivinen käsitys siitä, miksi aito monotonisuus on tärkeää. Tämä edellytetään, että yhtälö voidaan ratkaista yksikäsitteisesti, sillä aidosta monotonisuudesta seuraa, että funktio on bijektio.

Sivut pitäisi saada vierekkäin, että vertailu on mielekästä. Onnistuu joko

1) PDF-katseluohjelman asettamisella kahden sivun näkymään

2) tulostamalla sivut tai

3) projektorilla (jos opiskelijoiden näytöt ovat liian pieniä).

Tehtävässä 12 opiskelija käyttää eksponentti- ja logaritmifunktioista oppimaansa todellisen ilmiön eli solujakautumisen mallintamiseen, kuten opetussuunnitelma [10] suosittelee. Opiskelija on itse vastuussa funktion luomisesta ja se riippuu siitä, miten opiskelija tulkitsee videota. Tehtävässä yhdistetään funktion käyttö sekä yhtälön- että epäyhtälönratkaisua. Tehtävän teoria on peräisin artikkelista [14], jossa kerrotaan nykyinen arvio ihmiskehon solumäärästä ja kirjasta [3], josta saadaan tieto eukaryoottisen solun jakautumisajasta.

12 Opeopas:

Vastaukset ovat suuntaa-antavat, sillä mallinnukset voivat erota riippuen tulkinnasta.

1. $f(x) = 2^{t/4}$ (jos halutaan joka sekunnilla)

1. a) Video kestää 6,14 min=6 min 8,4 s eli $1{,}4 \cdot 10^{28}$ kpl.

1. b) 58 sekuntia.

2. a) 44,77 vuorokautta. Tässä on myös hyvä syy tutustua biologian opettajaan. 100 kiloisen ihmiskehon solulájän muodostumisessa menisi 44,77 vuorokautta, mutta jo raskaus kestää 9 kuukautta. Miksi näin?

2. b) Aikaa on vuorokausien 20,52 ja 27,58 välillä eli vähän yli viikko: 7,06 vuorokautta.

Jatkokysymyksiä keskustelun herättämiselle: Voisiko tehdä erilaisia funktioita? Onko mielekkäin funktio sellainen, joka perustuu yhteen solujakautumiseen?

Tehtävän 13 esitellään ylioppilaskoetehtävä keväältä 2019, jossa opiskelijan täytyy huomioida logaritmifunktion ominaisuudet: laskusäännöt, määrittelyjoukon kaventamisen vaikutukset ja aito monotonisuus suuruusjärjestyksen arvioimisessa.

Tehtävässä 14 varioinnin kohteena ovat kaikkia logaritmissa esiintyvät muuttujat, kuten variaatioteorian yhdistämistasolla halutaan [9]. Tässä vaiheessa opiskelijalla pitäisi olla joustava käsitys logaritmista funktiona ja, miten se käyttäytyy yhtälössä, jolloin tehtävä mittaa hyvin logaritmin määritelmän ymmärtämistä. Tehtävän toisessa osassa opiskelijat voivat esittää toisilleen väitteitä toimivista ja toimimattomista lukujoukkojen yhdistelmistä, eli opiskelijat toimivat väitteidentekijöinä [16]. Tehtävän voi myös tehdä siten, että opiskelijat esittävät toisilleen haasteita luomalla uusia tehtäviä [16].

14 Opeopas:

Kannattaa kannustaa pohtimaan erilaisia lukuyhdistelmiä, että vältytään tilanteilta: "$\log_2 2 = 1$ on tosi ja $\log_2 2 = 2$ on epätosi." Ohjata kysymyksillä: "Entä jos kantaluku olisikin pienempi kuin yksi? Entä jos numerus on pienempi kuin kantaluku? Entä jos..." Voidaan myös pohtia mikä on riittävä perustelu.

1. a) - c) ovat mahdollisia ja d) - f) mahdottomia.

2. Mieluiten paritehtävänä, jolloin halu tehdä vaikeampia yhtälöitä kasvaa, kun kaveri joutuu määrittämään mikä toimii ja mikä ei. Yksinkertaisesti kannattaa listata millaisia lukuja alueisiin kuuluu ja ei kuulu.

Viitteet

[1] Brandell, G., Hemmi, K., & Thunberg, H. (2008). The widening gap—A Swedish perspective. *Mathematics Education Research Journal*, 20(2), 38-56.

[2] Chua, B. L., & Wood, E. (2005). Working with logarithms: students' misconceptions and errors. *The Mathematics Educator*, 8(2), 53-70.

[3] Cooper GM. The Cell: A Molecular Approach. 2nd edition. Sunderland (MA): Sinauer Associates; 2000. The Eukaryotic Cell Cycle. Available from: https://www.ncbi.nlm.nih.gov/books/NBK9876/.

[4] Ericsson, K. A., Krampe, R. T., & Tesch-Römer, C. (1993). The role of deliberate practice in the acquisition of expert performance. *Psychological review*, 100(3), 363.

[5] Ganesan, R., & Dindyal, J. (2014). An investigation of students' errors in logarithms.

[6] Cuoco, A., Goldenberg, E. P., & Mark, J. (1996). Habits of mind: An organizing principle for mathematics curricula. *The Journal of Mathematical Behavior*, 15(4), 375-402.

[7] Kanamori, H. (1977). The energy release in great earthquakes. *Journal of geophysical research, 82(20)*, 2981-2987.

[8] Kenney, R., & Kastberg, S. (2013). Links in Learning Logarithms. *Australian Senior Mathematics Journal*, 27(1), 12-20.

[9] Kullberg, A., Kempe, U. R., & Marton, F. (2017). What is made possible to learn when using the variation theory of learning in teaching mathematics?. *ZDM*, 49(4), 559-569.

[10] Opetushalitus. (2015). Lukion opetussuunnitelman perusteet (LOPS). Helsinki: Opetushallitus.

[11] Rittle-Johnson, B., & Star, J. R. (2007). Does comparing solution methods facilitate conceptual and procedural knowledge? An experimental study on learning to solve equations.

[12] Rittle-Johnson, B., & Star, J. R. (2009). Compared with what? The effects of different comparisons on conceptual knowledge and procedural flexibility for equation solving. *Journal of Educational Psychology*, 101(3), 529.

[13] Rittle-Johnson, B., & Star, J. R. (2011). The power of comparison in learning and instruction: Learning outcomes supported by different types of comparisons.

[14] Sender, R., Fuchs, S., & Milo, R. (2016). Revised estimates for the number of human and bacteria cells in the body. *PLoS biology*, 14(8), e1002533.

[15] Star, J. R., & Stylianides, G. J. (2013). Procedural and conceptual knowledge: exploring the gap between knowledge type and knowledge quality. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 13(2), 169-181.

[16] Swan, M. (2006). Collaborative learning in mathematics. *A Challenge to our Beliefs.*

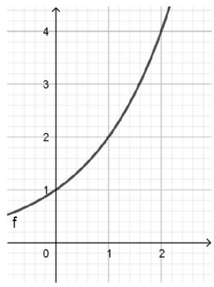
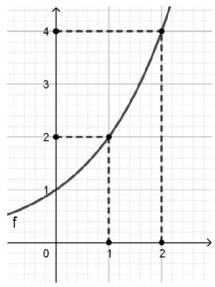
[17] Williams, H. R. A. (2011). A conceptual framework for student understanding of logarithms.

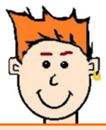
A Johdattelu logaritmiin ja logaritmin määritelmä

A.1 Johdattelu logaritmiin

Pohdinta A.1 Ennen logaritmin määrittelemistä esitellään tilanne, jossa sen olemassaolo auttaisi.

Kallen tehtävä oli ratkaista yhtälö $2^x = 4$ ja Leenan tehtävä oli ratkaista yhtälö $2^x = 3$ ja antaa tarkka arvo.

Kallen tapa		Leenan tapa	
Osaan aiempien tehtävien avulla ratkaista muuttujan x.	$2^x = 4$	$2^x = 3$	En osaa esittää lukua 3 kantaluvun 2 avulla.
Esitän luvun 4 kantaluvun 2 avulla.	$2^x = 2^2$		Piirrän hahmotelman funktiosta 2^x.
Saan vastauksen.	$x = 2$		Katson mille välille $2^x = 3$ jää.
		$x \approx 1{,}6$ En saa tarkkaa arvoa.	Näen mikä x suurin piirtein on.



1. Miten Kalle ratkaisi tehtävän?
2. Miten Leena ratkaisi tehtävän?
3. Mitä samanlaista ja mitä erilaista heidän tavoissaan on?
4. Minkälaisia eksponenttiyhtälöitä voi ratkaista Kallen tavalla? Anna esimerkkejä yhtälöistä.
5. Minkälaisia eksponenttiyhtälöitä **ei voi** ratkaista Kallen tavalla? Anna esimerkkejä yhtälöistä.

Yllä oleva tehtävä on esimerkki tilanteesta, kun eksponenttiyhtälön ratkaiseminen ei onnistukaan kätevästi. Kysymys onkin, onko eksponenttiyhtälöille ratkaisukeinoa, jota voisi käyttää aina ja vastaus olisi tarkka?

Lisääminen ja vähentäminen ovat toisensa kumoavia operaatioita. Esimerkiksi lukuun x voidaan lisätä luku 2 ja saadaan luku $x + 2$, jos tästä luvusta halutaan palata takaisin lukuun x meidän pitää vähentää luku 2. Sama ajatus pätee myös kertomiselle ja jakamiselle. Esimerkiksi luku x voidaan kertoa luvulla 2 ja saadaan luku $2x$. Vastaavasti luku $2x$ voidaan jakaa luvulla 2 ja saadaan $\frac{2x}{2} = x$.

Sama pätee myös potenssifunktioille ja niihin liittyviin yhtälöihin. Esimerkiksi yhtälön $x^2 = 2$ ratkaisuun tarvitaan juurifunktioiden apua, erityisesti neliöjuurifunktion $\sqrt{x}$. Nyt yhtälö ratkeaa tutulla tavalla:

$$\begin{aligned} x^2 &= 2 \qquad \| \sqrt{} \\ |x| &= \sqrt{2} \\ x &= \pm\sqrt{2} \\ x &= \pm 1{,}41421\ldots \end{aligned}$$

Haasteena siis näyttää olevan, että eksponenttifunktioille, esimerkiksi 2^x, ei ole kumoavaa operaatiota. Määritellään siis sellainen!

A.2 Logaritmin määritelmä

Määritelmä A.2 Olkoot $a \in \mathbb{R}$ ja $x \in \mathbb{R}$ siten, että $a \neq 1$, $a > 0$ ja $x > 0$.

Luvun x *a-kantainen logaritmi* $\log_a x$ on sellainen luku, johon luku a on korotettava, että saadaan luku x.

Matemaattisin symbolein esitettynä:

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x.$$

Määritelmä voi vaikuttaa hämmentävältä, mutta seuraavien tehtävien kautta siihen ja logaritmin käyttöön tutustutaan ja totutaan.

Mallitehtävä A.3 Leenan saama yhtälö tehtävässä A.1 voidaan ratkaista tarkasti logaritmin määritelmän A.2 avulla.

$$\begin{aligned} 2^x &= 3 && \| \text{ Käytetään logaritmin määritelmää A.2.} \\ \log_2 3 &= x \\ x &= \log_2 3 && \| \text{ Käytetään laskinta.} \\ &= 1{,}58496\ldots \end{aligned}$$

Tarkistetaan ja selitetään sanoin:

Jos luku 2 korotetaan lukuun $\log_2 3 = 1{,}58496\ldots$, niin saadaan luku 3 eli $2^{\log_2 3} = 2^{1{,}58496\ldots} = 3$.

Logaritmi on kätevä tapa merkitä päättymättömiä desimaalilukuja tarkasti (vrt. $\sqrt{2}$ tai π). Sen lisäksi, että tietää, miten jokin operaatio toimii, on myös tärkeää tuntea siihen liittyvät merkinnät.

Huomautus A.4

Sulkeet logaritmissa

Merkintä $\log_a(x+y)$ tarkoittaa, että logaritmi $\log_a$ otetaan summasta $x+y$ eli

$$\log_a(x+y) \neq \log_a x + y.$$

Logaritmin kanta

- Logaritmi, joka on 10-kantainen, on nimeltään *Briggsin logaritmi* ja sitä merkitään $\lg x$.
  - Esimerkki: $\log_{10} 72 = \lg 72$.
- Logaritmi, joka on e-kantainen, on nimeltään *luonnollinen logaritmi* ja sitä merkitään $\ln x$.
  - Esimerkki: $\log_e\left(\frac{365}{2}\right) = \ln\left(\frac{365}{2}\right)$.
- Muutoin kantaluku a merkitään näkyviin $\log_a x$.
  - Esimerkki: $\log_{\frac{2}{3}} 16$.

Aivan kuten juurilausekkeita koskevat tietyt rajoitukset, niin niitä on myös logaritmilausekkeilla. Seuraavien väitteiden avulla pohdit logaritmin määritelmää ja saat käsityksen siitä millaisia lukuja ja käsitteitä logaritmiin liittyy. Tarkoituksenasi ei ole vain katsoa logaritmin määritelmää ja todeta väitteet oikeiksi tai vääriksi, vaan lähesty väitettä mieluummin esimerkiksi eksponenttifunktioiden ominaisuuksien kautta. Tämän lähestysmistavan avulla voit nähdä, miten logaritmi ja eksponenttifunktio täydentävät toisiaan. Kumotaksesi väitteen sinun täytyy pystyä esittämään vastaesimerkki.

Esimerkki: Väite: "Kokonaisluvut eivät kuulu rationaalilukuihin."

Vastaus: Väite on epätosi, sillä esimerkiksi $-2 \in \mathbb{Q}$, koska rationaaliluvut ovat muotoa $\frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}_+$. Nyt luku $-2 = \frac{-2}{1} = \frac{-4}{2} = \ldots$ eli se kuuluu rationaalilukuihin.

Pohdinta A.5

Ota kantaa väitteisiin ja merkitse ovatko ne ”Aina totta” (A), ”Joskus totta” (J) vai ”Ei koskaan totta” (E). Perustele vastauksesi. Käytä vastaesimerkkejä kumotaksesi väitteitä.

1. Logaritmin kantaluku voi olla negatiivinen.	2. Logaritmin tulos on negatiivinen.	3. Logaritmin tulos on 0.
4. Logaritmin tulos on aina positiivinen.	5. Logaritmin kantaluku voi olla mikä vain positiivinen luku.	6. Logaritmin voi laskea luvusta 0.
7. Logaritmin voi laskea positiivisesta luvusta.	8. Logaritmin tulos on irrationaaliluku.	9. Logaritmin tulos on eksponentti.
10. Logaritmin tulos on kokonaisluku.	11. Jos jostain luvusta ottaa logaritmin, niin tulos on alkuperäistä lukua pienempi.	12. Logaritmi luvun käänteisluvusta on suurempi kuin logaritmi luvusta itsestään.
13. $\log_a a = 1$, $a \in \{\mathbb{R}_+ \setminus 1\}$	14. $a^{\log_a b} = b$, $a > 0, a \neq 1$	15. $\log_a x > \log_a y$, jos $x < y$.

Tarkoituksenmukainen harjoittelu (eng. ”deliberate practice”) tarkoittaa harjoittelua, jossa käsiteltävästä asiasta tuodaan esille ominaisuuksia keskittymällä yhteen tai useampaan asiaan kerrallaan. Esimerkiksi yksinään laskutehtävät tuovat harvoin esille mitään uutta ominaisuutta, mutta kokoamalla erilaisia tehtäviä yhteen näin saadaan tehtyä.

Yritä siis löytää jokaisen tehtäväryhmän idea tekemällä tehtävät ja kysymällä ”Miksi juuri tämä on tehtävänantona?”, ”Mitä nämä tehtävät tuovat esille logaritmista?”, ”Mitä erilaista ja samanlaista tehtävissä on?”

Pohdinta A.6

Seuraavissa tehtävissä tarvitset logaritmin määritelmää A.2. Palauta mieleesi myös eksponenttifunktion määritelmä ja sen laskusäännöt.

1. Harjoitustehtävä.
Muunna eksponenttimuotoon.

a) $\lg 10\,000 = 4$

b) $\log_2 \frac{1}{16} = -4$

c) $\lg \sqrt{10} = \frac{1}{5}$

d) $\ln e^{3{,}789\ldots} = 5$

Mitkä yhtälöistä ovat tosia? Perustele.

2. Harjoitustehtävä.
Sievennä ja laske.

a) $\lg 10$

b) $\log_2(49 + 15)$

c) $\log_{\frac{1}{2}} 16$

d) $\log_3 \sqrt[5]{81}$

e) $\ln e^{(x+2{,}7)}$

3. Harjoitustehtävä.
Muunna logaritmimuotoon
ja ratkaise x.

a) $3^x = 7$

b) $3^x = y$

c) $3^x = 7 + 3$

d) $3^x = y + 4$

Millä muuttujan y arvoilla ratkaisu on olemassa?

4. Harjoitustehtävä.
Muunna eksponenttimuotoon
ja ratkaise x.

a) $\log_3 \frac{1}{x} = 5$

b) $6 = x + \lg 12$

c) $\log_x 216 = 3$

d) $\log_7(x + 1) = \log_4 18$

Onko kaikilla yhtälöillä ratkaisu?

5. Harjoitustehtävä.
Muunna eksponenttimuotoon.

a) $\log_{49} -7 = y$

b) $\log_{-2} 8 = y$

c) $\log_a 2 = y,\ a \in \{\mathbb{Z}_+ \setminus 1\},\ y \in \mathbb{Z}_-$

Millä muuttujan y arvoilla yhtälöt ovat tosia?

Matematiikkaa opiskellessa voi herätä ajatus: ”Mihin tätä tarvitaan?” tai ”Missä tätä käytetään?” Seuraavassa tehtävässä käsitellään maanjäristyksiä ja sen tarkoitus on näyttää miksi logaritmi ja logaritminen asteikko on kätevä tapa esittää tietoa, kun kyseessä on hyvin suuria, toisistaan eroavia arvoja, joita kuitenkin halutaan kuvata esimerkiksi samassa diagrammissa.

Pohdinta A.7 Logaritmin käyttökohteita I

Maanjäristysten voimakkuuksien vertailussa käytetään logaritmista asteikkoa. Aiemmin käytössä on ollut *Richterin asteikko*, mutta sittemmin ollaan siirrytty käyttämään *momenttimagnitudiasteikkoa*.

Momenttimagnitudi M_W määritellään seuraavasti

$$M_W = \frac{\lg E}{1{,}5} - 7{,}87,$$

jossa E on maanjäristyksessä vapautuva energiamäärä jouleina (J). [7].

Kun ratkaistaan E saadaan

$$E = 10^{1{,}5\cdot(M_W+7{,}87)},$$

jonka avulla voidaan laskea energiamäärä, joka vapautuu järistyksessä, kun tiedetään momenttimagnitudi M_W.

Taulukossa on esitetty joidenkin maiden voimakkaimmat ikinä mitatut maanjäristykset ja päivämäärät jolloin ne tapahtuivat.

Maa	**Voimakkuus** (M_W)	**Päivämäärä**
Suomi	4,7	4.8.1898
Eritrea	6,2	23.9.1915
Bulgaria	7,2	4.4.1904
Fiji	8,2	19.8.2018
Yhdysvallat	9,2	27.3.1964

Ratkaise seuraavat tehtävät käyttäen GeoGebraa:

1. Kuinka paljon energiaa vapautti maanjäristys, joka tapahtui Suomessa?

2. Seuraa ohjeita:

   a) Avaa GeoGebran taulukkolaskentanäkymä. Tee pistelista, jonka y-koordinaatteina ovat taulukon momenttimagnitudit M_W. x-koordinaateiksi riittävät 1, 2, 3, 4, 5.

   b) Tee seuraavaksi vastaava pistelista, jonka y-koordinaatteina ovat energiamäärät E.

   c) Pistelistan pisteparit piirtyvät automaattisesti GeoGebran koordinaatistoon. Yritä saada kummankin pistelistan pisteet näkyville. Mikä etu logaritmisen asteikon käyttämisessä maanjäristysten vertailussa on?

3. Kuinka moninkertainen energiamäärä E vapautuu, kun verrataan toisiinsa järistyksiä, joiden momenttimagnitudit M_W ovat yhden kokonaisen askeleen toisistaan? (**Vinkki:** Käytä GeoGebran CAS-laskinta ja taulukon solujen arvoja.)

4. Kuinka moninkertainen energiamäärä vapautui, kun verrataan Yhdysvaltojen maanjäristystä Bulgarian maanjäristykseen?

5. Kuinka paljon energiaa pitää vapautua, että järistyksen momenttimagnitudi olisi suurempi kuin 5? Kuinka monta megatonnia TNT:tä tämä vastaa, kun yksi megatonni vapauttaa 4,148 petajoulea energiaa?

6. Selvitä, miksi *Richterin asteikkoa* ei enää käytetä.

B Logaritmifunktion määritelmä ja laskusäännöt

B.1 Logaritmifunktion määritelmä

Nyt määritellään logaritmifunktio, joka pystyy kumoamaan eksponenttifunktion eli määritellään eksponenttifunktion $f(x) = a^x$ käänteisfunktio $g(x) = \log_a x$.

Määritelmä B.1 Logaritmifunktio $f(x) = \log_a x$, $a > 0$ ja $a \neq 1$.

Logaritmifunktion $f(x)$ määrittelyjoukko on $M_f = \mathbb{R}_+$ ja arvojoukko on $A_f = \mathbb{R}$.

Pohdinta B.2 Käytä GeoGebran applettia Parametrien vaikutus logaritmifunktioon.

1. Tee taulukko, jossa on oma rivi joka parametrille ja merkitse, miten kuvaaja muuttuu, kun muutat niiden arvoja.

2. Seuraa ohjeita ja täytä taulukon viereen.

   (a) Paina ”Näytä $-h(x)$”. Miten se eroaa funktiosta $h(x)$? Miksi?

   (b) Paina ”Näytä $h(-x)$”. Miten se eroaa funktiosta $h(x)$? Miksi?

3. (a) Kirjaa ylös mitä ominaisuuksia logaritmifunktion kuvaaja näyttää säilyttävän, vaikka arvoja muutetaan. Yritä siis selittää yleisesti minkälainen logaritmifunktion kuvaaja on.

   (b) Kuvaile funktion $h(x)$ kuvaajan kulkua, kun $x \to \infty$. Mitkä arvot funktio saa?

Alla olevat logaritmifunktion ominaisuudet on tärkeä muistaa, joten huomioi erityisesti, että huomaat niiden pitävän paikkaansa käyttämällä yllä olevaa applettia.

Lause B.3 Logaritmifunktion $f(x) = \log_a x$ ominaisuuksia:

- Logaritmifunktio on jatkuva.
- Logaritmifunktio on aidosti vähenevä, kun kantaluvulle a pätee $0 < a < 1$.
- Logaritmifunktio on aidosti kasvava, kun kantaluvulle a pätee $a > 1$.

Pohdinta B.4

Ota kantaa väitteisiin ja merkitse ovatko ne ”Aina totta” (A), ”Joskus totta” (J) vai ”Ei koskaan totta” (E). Perustele vastauksesi. Käytä vastaesimerkkejä kumotaksesi väitteitä.

1. Funktio $f(x) = \lg(1 - x)$ on aidosti kasvava.	2. Logaritmifunktioilla $\log_a x$ ja $\log_b x$, $a \neq b$ on vain yksi leikkauspiste.	3. Funktio $\log_a(x + c)$, $c \in \mathbb{R}$ kulkee aina pisteen $(0, 1)$ kautta.
4. $\log_a x = \infty$, kun $x \to \infty$	5. $\log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x$	6. Logaritmifunktio $f(x) = \log_a x$ saa kaikki arvot välillä $[1, 2]$.

6. Harjoitustehtävä.
Selitä harjoitustehtävän 5 avulla, mikä ongelma muodostuu, jos logaritmifunktio $f(x) = \log_a x$ olisi määritelty kaikilla $a \in \mathbb{R}$.

7. Harjoitustehtävä.
Palauta mieleesi käänteisfunktion määritelmä.

1. Todista, että logaritmifunktio $f(x) = \log_a x$ ja eksponenttifunktio $g(x) = a^x$ ovat toistensa käänteisfunktioita.
2. Millaiset kuvaajat funktioilla $f(g(x))$ ja $g(f(x))$ on?

B.2 Logaritmin laskusäännöt ja niiden harjoittelua

Lause B.5

Määritelmän A.2 mukaiselle logaritmille pätevät seuraavat laskusäännöt vasemmalla ja esimerkit oikealla:

1) $\log_a b + \log_a c = \log_a(b \cdot c)$ (logaritmien summa)	1) $\log_2 4 + \log_2 8 = \log_2(4 \cdot 8)$
2) $\log_a b - \log_a c = \log_a\left(\frac{b}{c}\right)$ (logaritmien erotus)	2) $\log_3 27 - \log_3 3 = \log_3\left(\frac{27}{3}\right)$
3) $\log_a x^r = r \log_a x$ (eksponentin siirtosääntö)	3) $\log_5 25^2 = 2\log_5 25$
4) $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ (kantaluvun vaihto)	4) $\log_{25} \frac{1}{5} = \dfrac{\log_5 \frac{1}{5}}{\log_5 25}$
5) $\log_a a^x = x$	5) $\lg 10^2$
6) $a^{\log_a x} = x$	6) $e^{\ln x}$

8. Harjoitustehtävä.
Tarkista pitävätkö Lauseen B.5 laskusäännöt paikkaansa niiden vieressä olevien esimerkkien tapauksissa sieventämällä tai laskemalla ne.

Esimerkki B.6 Yllä olevat laskusäännöt ovat syy sille, miksi logaritmin kehittäminen oli hyvin tärkeä askel. Nykyään suurien lukujen kertolasku voidaan jättää tietokoneiden laskettavaksi, mutta ennen tietokoneiden aikaa tämä tehtiin käsin. Oli kätevää, että logaritmien avulla kertolasku voitiin muuttaa yhteenlaskuksi kohdan 1) mukaisesti.

Oikeastaan käytämme tätä tekniikkaa kertolaskuissa. Esimerkiksi laskussa $10 \cdot 100$ olemme tottuneet laskemaan nollat. Tässä tapauksessa niitä on 3, joten saadaan $10 \cdot 100 = 1000$. Logaritmin avulla lasku voidaan ilmaista näin:

$$
\begin{aligned}
& \lg(10 \cdot 100) \overset{1)}{=} \lg 10 + \lg 100 = 1 + 2 = 3 \\
\Leftrightarrow\ & \lg(10 \cdot 100) = 3 \\
\overset{A.2}{\Leftrightarrow}\ & 10^3 = 10^{\lg(10\cdot 100)} \overset{6)}{=} 10 \cdot 100 \\
\Leftrightarrow\ & 10 \cdot 100 = 10^3 = 1000
\end{aligned}
$$

Ensimmäisenä periaatteessa lasketaan, että montako nollaa lausekkeessa $10 \cdot 100$ on. Tämän jälkeen käytetään logaritmin määritelmää ja saadaan, että $10^3 = 10 \cdot 100$, josta lasketaan paljonko 10^3 on.

Sanotaan, että yksi tehokkaimmista tavoista oppia on opettaa. Seuraavassa tehtävässä luot omia lausekkeitasi käyttämällä logaritmin laskusääntöjä. Sievennä jonkun toisen lauseketta ja merkitse, missä kohtaa käytät mitäkin laskusääntöä, kuten yllä olevassa esimerkissä tehtiin. Verratkaa lopuksi käytittekö samoja laskusääntöjä lausekkeen luomisessa ja purkamisessa.

Pohdinta B.7 ”Doing and undoing”

1. Luo vähintään kolme sievennettävää lauseketta. Pyri tekemään lausekkeet siten, että ensimmäinen on helpoin ja viimeinen vaikein.

   Esimerkki: $\ln 50 = \ln(2 \cdot 25) = \ln 2 + \ln 25 = \ln 2 + \ln 5^2 = \ln 2 + 2\ln 5$. Sievennettävä lauseke on siis $\ln 2 + 2\ln 5$.

2. Luo vähintään kaksi sievennettävää lauseketta, kuten edellisessä kohdassa, mutta lausekkeessa pitää olla vähintään yksi muuttuja mukana.

   Muista määritellä muuttujan määrittelyjoukko. Tämä on myös osa tehtävää, kun annat lausekkeen sievennettäväksi.

   Esimerkki: Nyt $\log_3(b-1) + 2 = \log_3(6(b-1)/6) + 2^{\log_2 4} = \log_3(6b-6) - \log_3(6) + 2^{\log_2 4}$. Olkoon $b > 1$, jotta lauseke on määritelty.

B.3 Logaritmin laskusääntöjen todistamista

Aiemmin tarkistimme, että lauseen B.5 laskusäännöt tosiaan pitävät paikkaansa esimerkkien tapauksessa. Laskusääntöjä ei kuitenkaan voisi kutsua säännöiksi, jos ne eivät pitäisi muulloin paikkaansa. Seuraavassa mallitehtävässä esitetään yhden laskusäännön todistus.

Mallitehtävä B.8 Todista, että $\log_a x^r = r\log_a x$.

Ratkaisu: Oletetaan, että logaritmi noudattaa Määritelmää A.2 ja muuttuja $r \in \mathbb{R}$. Olkoon $c \in \mathbb{R}$ ja merkitään $\log_a x = c$.

Logaritmin Määritelmän A.2 mukaan $\log_a x = c \Leftrightarrow a^c = x$.

Nyt

$$
\begin{aligned}
a^c &= x && \| \text{ Korotetaan potenssiin } r. \\
(a^c)^r &= x^r && \| \text{ Käytetään potenssien laskusääntöjä } (a > 0). \\
a^{cr} &= x^r && \| \text{ Käytetään logaritmin määritelmää.} \\
\log_a x^r &= cr && \| \text{ Aiemmin määriteltiin, että } \log_a x = c. \\
\log_a x^r &= \log_a x \cdot r = r\log_a x.
\end{aligned}
$$

Matematiikassa ei riitä, että vain todistuksen tekijä ymmärtää ja tietää todistuksensa kulun. Sen lisäksi, että matemaatikko onnistuu mielestään todistamaan jonkin väitteen todeksi, täytyy tiedeyhteisön olla myös yhtä mieltä todistuksen aukottomuudesta. Tämä edellyttää sitä, että todistuksessa merkitään **selvästi** ja **selkokielisesti** näkyviin oletukset, eri vaiheiden perustelut ja mitä muita ennestään tunnettuja lauseita todistuksessa käytetään. Tämäkin kuitenkin edellyttää, että matematiikan merkintöjä ja kieltä opiskellaan ensin.

Seuraavassa tehtävässä harjoittelet todistuksen kirjoittamista ja voit verrata todistuksen kulkua edelliseen mallitehtävään.

Pohdinta B.9 Eräs matemaatikko on hukannut puhtaaksikirjoitetun todistuksensa logaritmin summasäännölle ja jäljelle jäi vain suttupaperi, joka oli päätynyt paperisilppuriin. Järjestä todistuksen vaiheet oikein ja tee tarvittavat lisämerkinnät, että lukija voi ymmärtää todistuksen kulun.

Osoita, että $\log_a b + \log_a c = \log_a(b \cdot c)$.

1) $\log_a(b \cdot c) = y$

2) $\log_a c = x$

3) $y = z + x$

4) $a^z = b$

5) $a^x = c$

6) $a^y = b \cdot c$

7) $a^y = a^z \cdot a^x$

8) $a^y = a^{z+x}$

9) $\log_a b = z$

10) $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

9. Harjoitustehtävä.
Todista Lauseen B.5 väite

a) $\log_a a^x = x$.

b) $a^{\log_a x} = x$.

c) $\log_a b - \log_a c = \log_a \left(\dfrac{b}{c}\right)$.

10. Harjoitustehtävä.
Onko yhtälö tosi? Miksi tai miksi ei?

$$\lg(1 + 2 + 3) = \lg(1) + \lg(2) + \lg(3)$$

11. Harjoitustehtävä.
Aseta suuruusjärjestykseen pienimmästä suurimpaan:

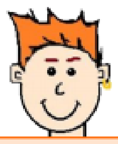
$$\lg 5 - \lg 1, \quad \lg \tfrac{1}{2} + \lg 2, \quad -\lg 2, \quad \tfrac{\ln \frac{1}{2}}{\ln 10}, \quad -\lg 7^{\log_7 \frac{3}{4}}.$$

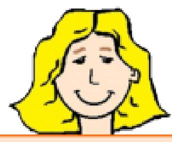
C Logaritmiyhtälöt ja -epäyhtälöt

C.1 Logaritmiyhtälön ratkaiseminen

Pohdinta C.1 Logaritmiyhtälöiden ratkaiseminen voi aluksi tuntua oudolta, sillä logaritmin käsitettä ei ole käsitelty aiemmin. Vertailutehtävän avulla nähdään, että mitä asioita niiden ratkaisemisessa tulee huomioida. Nämä asiat ovat tuttuja muidenlaisten yhtälöiden ratkaisusta.

Kallen tapa		Leenan tapa	
	$\sqrt{x-1}=2$	$\ln(x-1)=2$	
Määritän määrittelyjoukon.	Määrittelyjoukko: $x-1\geq 0 \quad \| +1$ $x\geq 1$	Määrittelyjoukko: $x-1>0 \quad \| +1$ $x>1$	Määritän määrittelyjoukon.
Käytän funktiota x^2 yhtälön kummallekin puolelle.	$\sqrt{x-1}=2$ $(\sqrt{x-1})^2=2^2$ $x-1=4 \quad \| +1$	$\ln(x-1)=2$ $e^{\ln(x-1)}=e^2$ $x-1=e^2 \quad \| +1$	Käytän funktiota e^x yhtälön kummallekin puolelle.
Saan vastauksen ja se on määrittelyjoukossa.	$x=5$	$x=e^2+1$	Saan vastauksen ja se on määrittelyjoukossa.





1. Miten Kalle ratkaisi tehtävän?
2. Miten Leena ratkaisi tehtävän?
3. Mitä samanlaista ja mitä erilaista heidän tavoissaan on?
4. Miten ja miksi Kalle käyttää funktiota x^2 ja Leena funktiota e^x?
5. Miten ratkaisisit yhtälön $10^{x-1}=2$?

Tärkeää ei ole muistaa tarkalleen mitä vaiheita yhtälönratkaisussa on ja toistaa niitä, vaan ymmärtää, miksi eri keinojen käyttäminen on mahdollista. Nämä keinot perustuvat funktioiden ominaisuuksiin. Ei ole sattumaa, että useat käyttämämme funktiot ”käyttäytyvät hyvin” eli tiedämme niiden olevan jatkuvia ja aidosti monotonisia. Vertailutehtävässäkin esiintynyt käänteisfunktio on mahdollista, jos funktio on aidosti monotoninen.

Seuraavassa harjoitustehtävässä tutustutaan siihen, miten logaritmilausekkeita voi käsitellä yhtälönratkaisussa. Lisäksi voidaan keskustella vastauksen oikeellisuudesta ja sen oikeasta esitysmuodosta. Keskity taas huomaamaan, mitä tehtäväryhmä tuo esille, kun yhtälössä on logaritmeja.

Pohdinta C.2

1. Ratkaise x.

   a) $x + 1 = 2x$

   b) $x + 1 = \sqrt{2}x$

   c) $x + 1 = x \cdot \log_3 2$

   d) $3^{x+1} = 2^x$

2. Kirjan lopussa olevissa vastauksissa kohdalle d) on kaksi erinäköistä vastausta.

   a) Osoita, että ne ovat samat.

   b) Onko muita vastauksia? Mitkä vastaukset ovat oikein?

Tässä oppimateriaalissa on nyt esitelty logaritmiyhtälöiden ratkaisemiseen liittyviä perusperiaatteita. Halutessasi voit esimerkiksi googlettaa ”logarithmic equation excercises” ja löytää ratkaistavia yhtälöitä. Olennainen osa logaritmiyhtälöiden ratkaisussa on huomata, milloin pystyy käyttämään Lauseen B.5 laskusääntöjä.

C.2 Logaritmiepäyhtälön ratkaiseminen

Pohdinta C.3 Tämän vertailutehtävän avulla tuodaan esille miten epäyhtälönratkaisu eroaa yhtälönratkaisusta.

Kalle ratkaisi yhtälön $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)+\log_{\frac{1}{2}}(x-2)=\log_{\frac{1}{2}}(3x-5)$ **ja Leena ratkaisi epäyhtälön** $\log_{\frac{1}{2}}(x+1)+\log_{\frac{1}{2}}(x-2)>\log_{\frac{1}{2}}(3x-5)$.

Kallen tapa

Määritän määrittelyjoukon.

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+1)+\log_{\frac{1}{2}}(x-2)=\log_{\frac{1}{2}}(3x-5)$$

Määrittelyjoukko:

$$\begin{array}{lll} x+1>0 \quad \| -1 & x-2>0 \quad \| +2 & 3x-5>0 \quad \| +5 \\ x>-1 & x>2 & 3x>5 \quad \| :3>0 \\ & & x>5/3 \end{array}$$

Eli mj: $x>2$.

Koska funktio $\log_{\frac{1}{2}}$ on aidosti monotoninen, niin yhtäsuuruus säilyy.

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{2}}(x+1)+\log_{\frac{1}{2}}(x-2) &= \log_{\frac{1}{2}}(3x-5) \\ \log_{\frac{1}{2}}((x+1)(x-2)) &= \log_{\frac{1}{2}}(3x-5) \\ (x+1)(x-2) &= 3x-5 \\ x^2-2x+x-2 &= 3x-5 \\ x^2-4x+3 &= 0 \end{aligned}$$

Ratkaisen nollakohdat ja tarkistan määrittelyjoukon.

$$\begin{aligned} & x^2-4x+3=0 \\ & x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{4} \\ & \;\;=\frac{4\pm 2}{4}=2\pm 1 \end{aligned}$$

$x=2+1=3$ tai $x=2-1=1$

Määrittelyjoukko on $x>2$, joten vain $x=3$ kelpaa ratkaisuksi.

Leenan tapa

Määritän määrittelyjoukon.

$$\log_{\frac{1}{2}}(x+1) + \log_{\frac{1}{2}}(x-2) > \log_{\frac{1}{2}}(3x-5)$$

Määrittelyjoukko:

$$\begin{aligned} x+1 &> 0 \quad \| -1 & x-2 &> 0 \quad \| +2 & 3x-5 &> 0 \quad \| +5 \\ x &> -1 & x &> 2 & 3x &> 5 \quad \| : 3 > 0 \\ & & & & x &> 5/3 \end{aligned}$$

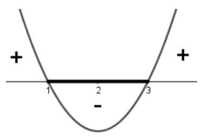
Eli mj: $x > 2$.

Koska $\log_{\frac{1}{2}}$ on aidosti vähenevä, niin epäyhtälömerk-ki kääntyy.

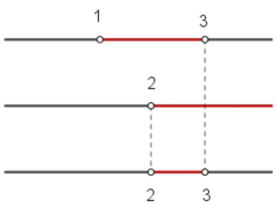
$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{2}}(x+1) + \log_{\frac{1}{2}}(x-2) &> \log_{\frac{1}{2}}(3x-5) \\ \log_{\frac{1}{2}}((x+1)(x-2)) &> \log_{\frac{1}{2}}(3x-5) \\ (x+1)(x-2) &< 3x-5 \\ x^2 - 2x + x - 2 &< 3x - 5 \\ x^2 - 4x + 3 &< 0 \end{aligned}$$

Ratkaisen nollakohdat ja niiden avulla epäyhtälön.

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 3 &= 0 \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{4} \\ &= \frac{4 \pm 2}{4} = 2 \pm 1 \\ x = 2+1 = 3 &\vee x = 2-1 = 1 \end{aligned}$$



eli $1 < x < 3$.



Määrittelyehto ja yo. epäyhtälö ovat yhtä aikaa voimassa. Eli vastaus on $2 < x < 3$.

1. Miten Kalle ratkaisi tehtävän?
2. Miten Leena ratkaisi tehtävän?
3. Mitä samanlaista ja mitä erilaista heidän tavoissaan on?
4. Miten Kalle ja Leena käyttävät logaritmifunktion aitoa monotonisuutta hyväkseen?
5. Miten Leenan ratkaisu olisi erilainen, jos epäyhtälö olisi $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) + \log_{\frac{1}{2}}(x-2) \geq \log_{\frac{1}{2}}(3x-5)$?

Loppujen lopuksi ratkaisustrategioissa on paljon samaa, mutta funktion aidon monotonisuuden käyttö eroaa olennaisesti ratkaisuissa ja, onko epäyhtälössä merkki $<$ vai $\leq$ voi vaikuttaa vastaukseen hyvin olennaisesti. Seuraavaksi vielä yhteenveto, mitä epäyhtälönratkaisussa kannattaa muistaa.

Lisätieto C.4 Epäyhtälönratkaisussa on tärkeää tietää, ovatko siinä olevat funktiot aidosti kasvavia vai aidosti väheneviä.

- Logaritmifunktio $\log_a x$ on aidosti vähenevä, jos $0 < a < 1$. Tällöin epäyhtälönratkaisussa epäyhtälömerkki **kääntyy**:

$$\begin{aligned} & \log_a x < \log_a y \\ \Leftrightarrow \quad & x > y. \end{aligned}$$

- Logaritmifunktio $\log_a x$ on aidosti kasvava, jos $a > 1$. Tällöin epäyhtälönratkaisussa epäyhtälömerkki **pysyy ennallaan**:

$$\begin{aligned} & \log_a x < \log_a y \\ \Leftrightarrow \quad & x < y. \end{aligned}$$

12. Harjoitustehtävä.
Logaritmin käyttökohteita II

Jan van Ijkenin videolla ”Becoming” nähdään solujakautuminen nopeutettuna.

1. Kehitä videon avulla funktio, jonka avulla voidaan laskea solujen määrä, kun määrä riippuu ajasta.
   a) Kuvitellaan, että solujen jakautumisen tahti pysyy samana, eikä soluja kuole koko videon aikana. Montako solua videon lopussa on?
   b) Nykyisten arvioiden mukaan 100 kg ihmisen kehossa on n. $3{,}0 \cdot 10^{13}$ solua [14]. Kuinka kauan videon solulla kestäisi jakautua, että soluja olisi tämän verran?
2. Oletetaan, että kyseessä onkin aitotumaisia soluja, joita esimerkiksi ihmisillä on. Niiden jakautuminen kestää 24 tuntia. [3].
   a) Kuinka kauan kestää saavuttaa edellisen kohdan solumäärä?
   b) Solujen joukkoon halutaan lisätä väriainetta, kun niiden määrä on välillä $1.5 \cdot 10^6 - 2 \cdot 10^8$. Kuinka paljon aikaa on tehdä tämä värjäys?

13. Harjoitustehtävä.
Selvitä ilman apuohjelmia, kumpi lauseke on suurempi muuttujan arvoilla $x > 1$.

$$\ln(2x + 1) - \ln(2x) \text{ vai } \ln(x + 1) - \ln x. \text{ [3/K19]}$$

14. Harjoitustehtävä.

1. Yritä keksiä (ei välttämättä mahdollista) jokaisesta kohdasta vähintään kaksi logaritmiyhtälöesimerkkiä, joista toinen on tosi ja toinen on epätosi, kun logaritmiyhtälö
$$\log_a x = y$$
määritellään siten, että
   a) $a \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{Z}_+, y \in \mathbb{Z}_+$.
   b) $a \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Q}_+ \setminus \mathbb{Z}$.
   c) $a \in \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}_- \setminus \mathbb{Z}$.
   d) $a \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}_-$.
   e) $a \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Z}_-$.
   f) $a \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$.

2. Keksi vähintään kolme uutta tapausta kummastakin seuraavasta kohdasta.
   a) Miten muuttujat a, x ja y pitää määritellä, että logaritmiyhtälö $\log_a x = y$ on aina epätosi?
   b) Miten muuttujat a, x ja y pitää määritellä, että löytyy aina vähintään yksi tosi logaritmiyhtälö?

D Tehtävien vastaukset

1 a) $10^4 = 10\,000$ b) $2^{-4} = \dfrac{1}{16}$ c) $10^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{10}$ d) $e^5 = e^{3{,}789\ldots}$

2 a) 1 b) 6 c) -4 d) $\dfrac{4}{5}$ e) $x + 2{,}7$

3 a) $x = \log_3 7$ b) $x = \log_3 y$ c) $x = \log_3 10$ d) $x = \log_3(y+4)$

4 a) $x = 3^{-5}$ b) $x = 6 - \lg 12$ c) $x = 6$ d) $x = 7^{\log_4 8} - 1$

5 a) $49^y = -7$ b) $(-2)^y = 8$ c) $a^y = 2$

A.7 1. $7{,}16 \cdot 10^{18}$ J 3. Noin 32. 4. Noin 1000. 5. Enemmän kuin $2{,}02 \cdot 10^{19}$ J ja 4865,9 megatonnia.

6 Funktio ei olisi jatkuva.

11 $-\lg 2 = \frac{\ln \frac{1}{2}}{\ln 10} < -\lg 7^{\log_7 \frac{3}{4}} < \lg \frac{1}{2} + \lg 2 < \lg 5 - \lg 1$

C.2 1. a) $x = 1$ b) $x = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$ c) $x = \frac{1}{\log_3 2 - 1}$ tai $x = \frac{\log_2 3}{1 - \log_2 3}$ d) $x = \frac{1}{\log_3 2 - 1}$ tai $x = \frac{\log_2 3}{1 - \log_2 3}$

12 Vastaukset ovat suuntaa-antavat, sillä mallinnukset voivat erota riippuen tulkinnasta.

1. $f(x) = 2^{t/4}$ (joka sekunnilla)

1. a) $1{,}4 \cdot 10^{28}$ kpl.

1. b) 58 sekuntia.

2. a) 44,77 vuorokautta.

2. b) Aikaa on vuorokausien 20,52 ja 27,58 välillä eli 7,06 vuorokautta.

13 $\ln(x+1) - \ln x$